流体运动学涉及描述流体的运动，而不必考虑引起运动的力和力矩。在本章中，我们将介绍与流动流体相关的几个运动学概念。我们讨论了材料导数及其在将守恒方程从流体流动的拉格朗日描述（跟随流体粒子）转换为流体流动的欧拉描述（与流场有关）中的作用。然后我们讨论了各种可视化流场的方法——流线、条纹、路径、时间线、光学方法纹影和阴影图，以及表面方法；我们描述了绘制流动数据的三种方法——剖面图、矢量图和等高线图。我们解释了流体运动和变形的四个基本运动学特性——平移率、旋转率、线性应变率和剪切应变率。然后讨论流体流动中的涡度、旋转度和无旋度的概念。最后，我们讨论雷诺输运定理 (RTT)，强调其在将运动方程从遵循系统的方程转换为与流体流入和流出控制体积有关的方程中的作用。解释了无穷小流体单元的材料导数和有限控制体积的 RTT 之间的类比。

**第4-1节 拉格朗日和欧拉描述** 2021年7月4日14点51分

称为**运动学[kinematics]**的主题涉及运动的研究.在流体动力学中,流体运动学是研究流体如何流动以及如何描述流体运动.从基本的角度来看,有两种不同的方式来描述运动.第一种也是最熟悉的方法是你在高中物理中学到的方法——跟随单个物体的路径.例如,我们都见过台球桌上的球或空气曲棍球桌上的冰球与另一个球或冰球或墙壁碰撞的物理实验(图4-1).牛顿定律用于描述此类物体的运动,我们可以准确预测它们的去向以及动量和动能如何从一个物体交换到另一个物体.此类实验的运动学涉及跟踪每个对象的位置矢量,和每个物体的速度矢量,作为时间的函数(图4-2).当这种方法应用于流动的流体时,我们以意大利数学家约瑟夫·路易斯·拉格朗日(Joseph Louis Lagrange)(1736-1813)的名字将其称为流体运动的**拉格朗日描述**.拉格朗日分析类似于您在热力学中学到的(封闭)系统分析;也就是说,我们遵循了大量的固定单位.拉格朗日描述要求我们跟踪每个单独的流体包裹的位置和速度,我们将其称为流体粒子,并将其视为具有固定单位的包裹.

可以想象,这种描述运动的方法对于流体来说比对于台球困难得多!首先,当流体粒子四处移动时,我们不能轻易定义和识别它们.其次,流体是一个连续体(从宏观的角度来看),因此流体粒子之间的相互作用不像台球或空气曲棍球等不同物体之间的相互作用那样容易描述.此外,流体粒子在流动时会不断变形.

从微观的角度来看,流体是由数十亿个不断相互撞击的分子组成的,有点像台球;但是即使对于我们最快和最大的计算机来说,跟踪这些分子的一个子集也是相当困难的.然而,拉格朗日描述有许多实际应用,例如跟踪流动中的被动标量以模拟污染物运输,有关宇宙飞船重返地球大气层的稀有气体动力学计算,以及流动可视化和基于粒子跟踪的测量系统(如第4-2节所述).

描述流体流动的一种更常见的方法是对流体运动的**欧拉描述**,以瑞士数学家莱昂哈德·欧拉(Leonhard Euler)(1707-1783)的名字命名.在流体流动的欧拉描述中，定义了一个称为**流动域**或**控制体积**的有限体积,流体通过它流入和流出.我们不是跟踪单个流体粒子,而是在控制体积内定义**场变量**,空间和时间函数.特定时间特定位置的场变量是当时恰好占据该位置的流体粒子的变量值.例如,**压力场**是一个**标量场变量**;对于笛卡尔坐标中的一般非定常三维流体流动,

我们以类似的方式将**速度场**定义为**矢量场变量**,

同样,**加速度场**也是一个**矢量场变量**,

这些(和其他)场变量共同定义了**流场[flow field]**.方程4-2的速度场在笛卡尔坐标中展开为,

可以对方程4-3的加速度场进行类似的扩展.在欧拉描述中,所有这些场变量都定义在控制体积中的任何位置和时间t中的任何时刻(图4-3).在欧拉描述中,我们并不真正关心单个流体粒子会发生什么;相反,我们关心的是在感兴趣的时间恰好位于感兴趣位置的任何流体粒子的压力,速度,加速度等.

通过想象一个人站在河边,测量它的特性,这两种描述之间的区别变得更加清晰.在拉格朗日方法中,他投入了一个随水向下游移动的探针.在欧拉方法中,他将探头固定在水中的固定位置.虽然拉格朗日描述在很多场合是有用的,但欧拉描述对于流体力学应用通常更方便.此外,实验测量通常更适合欧拉描述.例如,在风洞中,速度或压力探头通常放置在流动中的固定位置,测量 或.然而,虽然遵循单个流体粒子的拉格朗日描述中的运动方程是众所周知的(例如,牛顿第二定律),但流体流动的运动方程在欧拉描述中并不那么明显,必须仔细推导.我们通过本章末尾的雷诺输运定理进行控制体积(积分)分析.我们在第9章推导出运动的微分方程.

**加速度场**

正如您在研究热力学时应该记得的那样,基本守恒定律(例如质量守恒定律和热力学第一定律)是针对固定恒等式的系统(也称为封闭系统)表达的.在控制体(也称为开放系统)分析比系统分析更方便的情况下,有必要将这些基本定律重写为适用于控制体的形式.同样的原则在这里也适用.事实上,热力学中的系统与控制体积和流体动力学中的拉格朗日与欧拉描述之间存在直接的类比.流体流动的运动方程(如牛顿第二定律)是为流体粒子而写的,我们也称之为**物质粒子**.如果我们要跟踪一个特定的流体粒子,因为它在流动中四处移动,我们将使用拉格朗日描述,并且运动方程将直接适用.例如,我们将根据物质位置向量()定义粒子在空间中的位置.然而,需要进行一些数学运算才能将运动方程转换为适用于欧拉描述的形式.

例如,考虑适用于我们的流体粒子的牛顿第二定律,

其中,是作用在流体粒子上的合力,是它的质量,而是它的加速度(图4-6).根据定义,流体粒子的加速度是粒子速度的时间导数,

然而,在时间的任何时刻,粒子的速度与粒子位置()处速度场的局部值相同,因为根据定义,流体粒子随流体移动.换句话说.为了在方程4-6中求时间导数,我们必须使用链式法则,因为因变量()是四个自变量(和)的函数,

在等式4-7中,是偏导数算子,d是全导数算子.考虑公式4-7右侧的第二项.由于加速度被定义为跟随流体粒子的加速度(拉格朗日描述),粒子的位置相对于时间的变化率为(图4-7),其中是由公式4-4定义的速度矢量的分量.类似地,和 .此外,在所考虑的任何时刻,拉格朗日坐标系中流体粒子的物体位置矢量等于欧拉坐标系中的位置矢量.等式4-7因此变成,

其中我们还使用了的(显而易见的)事实.最后,在任何时刻t,方程4-3的加速度场必须等于恰好占据该位置的流体粒子的加速度在时间t.为什么?因为根据定义,流体粒子会随着流体流动而加速.因此,我们可以用方程4-7和方程4-8中的替换,以从拉格朗日坐标系转换为欧拉坐标系.在向量形式中,方程4-8写为,

其中是**梯度算子**或**del算子**,一个在笛卡尔坐标中定义为的向量算子,

在笛卡尔坐标系中,加速度矢量的分量是,

方程4-9右侧的第一项称为**局部加速度**,仅对于非定常流动才为非零.第二项称为**对流[advective]加速度**(有时为**对流[convective]加速度**);即使对于稳定流,该项也可以是非零的.它考虑了流体粒子移动(对流或对流)到流动中的新位置的影响,其中速度场是不同的.例如,考虑通过花园软管喷嘴的稳定水流(图4-8).我们在欧拉参考系中将**稳态[steady]**定义为流场中任一点的特性不随时间变化.由于喷嘴出口处的速度大于喷嘴入口处的速度,即使流动稳定,流体粒子也明显加速.由于方程4-9中的对流加速度项,加速度不为零.请注意,虽然从欧拉参考系中的固定观察者的角度来看,流动是稳定的,但从拉格朗日参考系的角度来看,流动是不稳定的,随着流体粒子进入喷嘴并在通过时加速喷嘴.

**物质导数** 2021年7月5日10点58分

公式4-9中的总导数算子有一个特殊的名称,即**物质导数**;它被分配了一个特殊的符号,以强调它是通过跟随流体粒子在流场中移动而形成的(图4-12).物质导数的其他名称包括**总导数**,**粒子导数**,**拉格朗日导数**,**欧拉导数**和**实质[substantial]导数**.

当我们将方4-12的物质导数应用于速度场时,结果是方程4-9表示的加速度场,因此有时称为**物质加速度**,

方程4-12也可以应用于除速度之外的其他流体属性,包括标量和矢量.例如,压力的物质导数写为,

方程4-14表示流体粒子在流体中移动时压力随时间的变化率,并且包含局部(不稳定)和对流分量(图 4-13).

**4-2 流动模式和流动可视化** 2021年7月5日11点15分

虽然流体动力学的定量研究需要高级数学,但可以从**流动可视化**(流场特征的视觉检查)中学到很多东西.流动可视化不仅在物理实验中很有用(图4-15),而且在数值解中也很有用[计算流体动力学(CFD)].事实上,使用CFD的工程师在获得数值解后所做的第一件事就是模拟某种形式的流动可视化,以便他或她可以看到“全貌”,而不仅仅是数字和定量数据的列表.为什么?因为人类的大脑旨在快速处理数量惊人的视觉信息;正如他们所说,一张图片胜过千言万语.有许多类型的流动模式可以在物理上(实验上)和/或计算上进行可视化.

**流线和流管**

**流线**是处处与瞬时局部速度矢量相切的曲线.

流线可用作整个流场中流体运动瞬时方向的指示器.例如,再循环流动区域和流体从实体壁分离的区域很容易通过流线图案识别.流线不能直接通过实验观察到,除非在稳定流场中,它们与路径线和条纹线重合,接下来将讨论.然而,在数学上,我们可以根据流线的定义为流线编写一个简单的表达式.

考虑沿流线的无穷小弧长;根据流线的定义,必须平行于局部速度矢量.通过使用相似三角形的简单几何参数,我们知道的分量必须与的分量成正比(图4-16).因此,

其中,是的大小,V是速率,即速度向量的大小.为简单起见,在图4-16中以二维方式说明了公式4-15.对于已知的速度场,我们对方程4-15进行积分以获得流线方程.在二维,得到如下微分方程:

在一些简单的情况下,方程4-16可能可以解析解;在一般情况下,它必须通过数值求解.在任何一种情况下,都会出现任意积分常数.每个选定的常数值代表不同的流线.因此,满足方程4-16的曲线族代表流场的流线.

**流管[streamtube]**由一束流线组成(图4-18),很像通信电缆由一束光缆组成.由于流线处处与局部速度平行,根据定义,流体不能穿过流线.推而广之,流管内的流体必须留在那里并且不能穿过流管的边界.您必须记住,流线和流管都是瞬时量,根据该时刻的速度场在特定时刻定义.在不稳定的流动中,流线模式可能会随时间发生显着变化.然而,在任何时刻,通过给定流管的任何横截面切片的质量流量必须保持不变.例如,在不可压缩流场的会聚部分,流管的直径必须随着速度的增加而减小,以保持质量(图4-19a).同样,流管直径在不可压缩流的发散部分增加(图4-19b).

**路径**

路径是单个流体粒子在一段时间内经过的实际路径.

路径是最容易理解的流动模式.路径线是一个拉格朗日概念,因为我们只是沿着单个流体粒子在流场中移动时的路径(图4-20).因此,路径与流体粒子的物质位置向量()相同,在第4-1节中讨论,在某个有限的时间间隔内追踪.在物理实验中,您可以想象一个示踪流体粒子以某种方式标记(通过颜色或亮度),以便很容易将其与周围的流体粒子区分开来.现在想象一个快门打开一段时间的相机,,其中记录了粒子的路径;生成的曲线称为路径线.图4-21显示了一个有趣的例子,用于说明波浪沿着水箱中的水面移动的情况.中性漂浮的白色示踪粒子悬浮在水中,并拍摄了一个完整波浪周期的时间曝光照片.结果是椭圆形的路径线,表明流体粒子上下和前后摆动,但在完成一波周期后返回其原始位置;没有净向前运动.您可能在海滩上的海浪中上下浮动时也经历过类似的事情.

一种称为**粒子图像测速(PIV)**的现代实验技术利用粒子路径的短段来测量流中整个平面上的速度场(Adrian,, 1991).(最近的进展还将该技术扩展到三个维度.)在PIV中,微小的示踪粒子悬浮在流体中,非常类似于图4-21.然而,流动被两次闪光(通常是来自激光的光片,如图4-22 所示)照亮,为每个移动的粒子产生两个亮点(由相机记录).然后,可以推断出每个粒子位置处速度矢量的大小和方向,假设示踪粒子足够小,可以随流体一起移动.现代数字摄影和快速计算机使PIV能够足够快地执行,因此也可以测量流场的不稳定特征.第8章更详细地讨论了PIV.

对于已知速度场,也可以数值计算路径.具体而言,示踪粒子的位置从某个开始位置和开始时间到某个较晚的时间t随时间积分.

当公式4-17计算和之间的t时,的曲线是该时间间隔内流体粒子的路径,如图4-20 所示.对于一些简单的流场,方程4-17可以进行分析积分.对于更复杂的流,我们必须进行数值积分.

**如果速度场是稳定的,则单个流体粒子遵循流线.因此,对于稳定流,路径与流线相同**.

**条纹线**

条纹线是流体粒子在流动中顺序通过指定点的轨迹.

条纹线是物理实验中最常见的流动模式.如果将一根小管子插入流中并引入连续的示踪流体流(水流中的染料或气流中的烟雾),则观察到的图案是条纹.图4-23显示了将示踪剂注入包含物体(例如机翼)的自由流中.圆圈代表单个注入的示踪流体颗粒,以均匀的时间间隔释放.当粒子被物体推开时,它们会围绕物体的肩部加速,如该区域中单个示踪粒子之间的距离增加所示.条纹线是通过将所有圆连接成一条平滑曲线而形成的.在风洞或水洞的物理实验中,烟雾或染料是连续注入的,而不是作为单个颗粒注入,由此产生的流动模式根据定义是一条条纹.在图4-23中,示踪粒子1的释放时间早于示踪粒子2,依此类推.单个示踪粒子的位置由从其注入流动的那一刻到当前时间的周围速度场确定.如果流动不稳定,则周围的速度场会发生变化,我们不能指望由此产生的条纹在任何给定的时刻都类似于流线或路径线.但是,如果流动是稳定的,则流线,路径线和条纹线是相同的(图4-24).

条纹线经常与流线或路径线混淆.虽然这三种流动模式在稳态流动中是相同的,但在非稳态流动中它们可能完全不同.主要区别在于,流线表示给定时刻的瞬时流动模式,而条纹线和路径线是具有一定年龄的流动模式,因此与它们相关联的时间历史.条纹线是时间积分流型的瞬时快照.另一方面,路径是某个时间段内单个粒子的时间暴露流路径.

Cimbala等人(1988)的实验生动地说明了条纹的时间积分特性.在此复制为图4-25.作者使用烟丝在风洞中进行流动可视化.在操作中,烟丝是一根涂有矿物油的细垂直丝.由于表面张力效应,油沿着线的长度分解成珠子.当电流加热电线时,每一个小油珠都会产生一条烟雾线.在图4-25a中,条纹是从位于直径为D的圆柱体下游的烟丝引入的,垂直于视图平面对齐.(当沿着一条线引入多条条纹线时,如图4-25所示,我们将其称为条纹倾斜.)流动的雷诺数为.由于不稳定的涡流脱落以交替模式从圆柱体中,烟雾聚集成一个明确定义的周期性模式,称为卡门涡街.在岛屿尾流的气流中,可以在更大范围内看到类似的模式(图4-26).

仅从图4-25a中,您可能会认为散落的涡流继续存在于圆柱下游的数百个直径处.然而,这个数字的条纹图案具有误导性!在图4-25b中,烟丝放置在圆柱体下游150直径处.由此产生的条纹是直的,表明脱落的涡流实际上已经在下游距离处消失了.在该位置流动平稳平行,不再有涡流;粘性扩散导致相邻的相反符号的涡流相互抵消了大约100个圆柱直径.图4-25a中 x/D = 150 附近的模式仅仅是存在于上游的涡街的残余.然而,图4-25b的条纹显示了该位置的正确流动特征.在处生成的条纹与该流动区域中的流线或路径线(直线,接近水平的线)相同,因为那里的流动是稳定的.

对于已知的速度场,可以通过数值方式生成条纹线.我们需要使用公式4-17跟踪示踪粒子从注入流中到当前的连续流的路径.从数学上讲,示踪粒子的位置是从其注入时间到当前时间的积分.等式4-17变为,

在复杂的非定常流动中,随着速度场随时间的变化,时间积分必须在数值上进行.当处的示踪粒子位置轨迹通过平滑曲线连接时,结果是所需的条纹线.

**时间线**

时间线是一组在同一(较早)时刻被标记的相邻流体粒子.

在需要检查流的均匀性(或缺乏流动性)的情况下,时间线特别有用.图4-28说明了两个平行墙之间的通道流中的时间线.由于壁上的摩擦,那里的流体速度为零(无滑移条件),时间线的顶部和底部固定在它们的起始位置.在远离壁.流动区域,标记的流体粒子以局部流体速度移动,使时间线变形.在图4-28的示例中,通道中心附近的速度相当均匀,但随着时间线的拉长,小的偏差往往会随着时间的推移而放大.时间线的一个非常实用的应用是可以直接从时间线生成速度矢量(图4-29).

时间线可以通过使用氢气泡线在水道中通过实验生成.当短脉冲电流通过阴极线时,水会发生电解,并在阴极线上形成微小的氢气气泡.由于气泡非常小,它们的浮力几乎可以忽略不计,并且气泡很好地跟随水流(图4-30).

折射流可视化技术

另一类流可视化基于光波的折射特性。正如您在物理学研究中所回忆的那样，通过一种材料的光速可能与在另一种材料中的光速有所不同，甚至在密度发生变化的情况下，即使在同一材料中也是如此。当光穿过一种流体进入具有不同折射率的流体时，光线会弯曲（它们被折射）。有两种主要的流动可视化技术利用空气（或其他气体）中的折射率随密度变化的事实。它们是阴影图技术和纹影技术 (Settles, 2001)。干涉测量法是一种可视化技术，它利用光穿过不同密度的空气时的相关相变作为流动可视化的基础，此处不作讨论（参见 Merzkirch，1987）。所有这些技术对于密度从流动中的一个位置到另一个位置发生变化的流场中的流动可视化非常有用，例如自然对流（温度差异导致密度变化）、混合流（流体种类导致密度变化）、和超音速流动（冲击波和膨胀波导致密度变化）。与涉及条纹线、路径线和时间线的流可视化不同，shadowgraph 和 schlieren 方法不需要注入可见的示踪剂（烟雾或染料）。相反，密度差异和光的折射特性为可视化流场中的活动区域提供了必要的手段，使我们能够“看到不可见的东西”。阴影图法产生的图像（阴影图）是当折射光线重新排列投射到观察屏幕或相机焦平面上的阴影，导致阴影中出现亮或暗图案时形成的图像（阴影图）。暗图案表示折射光线的起源位置，而亮图案则表示这些光线的终点，可能会产生误导。因此，暗区比亮区失真更小，在解释阴影图时更有用。例如，在图 4-31 的阴影图中，我们可以确信弓形激波（暗带）的形状和位置，但是折射的亮光扭曲了球体阴影的正面。阴影图不是真正的光学图像；毕竟，它只是一个影子。然而，纹影图像涉及透镜（或镜子）和刀刃或其他截止装置来阻挡折射光，是真正聚焦的光学图像。纹影成像比阴影成像更复杂（详见 Settles, 2001），但有许多优点。例如，纹影图像不会因折射光线而产生光学失真。纹影成像也对弱密度梯度更敏感，例如由自然对流（图 4-32）或超音速流中的膨胀扇等逐渐现象引起的密度梯度。还开发了彩色纹影成像技术。最后，可以调整纹影设置中的更多组件，例如截止设备的位置、方向和类型，以生成对手头问题最有用的图像。

表面流可视化技术

最后，我们简要地提到一些流量的可视化技术是沿固体表面有用。流体流动正上方的固体表面的方向可以与簇短被可视化的，灵活的字符串粘在表面的一端，在流动方向上点。毛簇是用于定位流分离，其中所述流动方向反转的区域是特别有用的。一种技术称为表面油的可视化可以被用于相同的目的的油放置在表面形成的条纹，其指示流的方向称为摩擦线。如果下雨的时候轻轻地你的车脏（ESPE-cially在冬天的时候盐是在道路上），你可以沿着车，甚至在挡风玻璃的引擎盖和侧面预告条纹。 这类似于通过表面油可视化观察到的情况。最后，有压力敏感的，并且对温度敏感的涂料，使研究人员能够观察沿固体表面的压力或温度分布。

第4-3节 流体流动数据图 2021年7月5日15点05分

不管结果如何获得（分析，实验，或计算），它通常是必要的方式，使读者能够获得流动性在时间和/或空间如何变化的感觉绘制流量数据。你已经熟悉时间曲线图，这是在湍流尤其有用（例如，绘制为时间的函数的速度分量），和XY-地块（例如，压力为半径的函数）。在本节中，我们将讨论另外三种类型是流体力学，轮廓图，矢量图和等高线图有用的场。

剖面图

剖面图指示标量属性的值如何沿流场中的某个所需方向变化。

剖面图是三者中最容易理解的，因为它们就像您从小学开始生成的常见 xy 绘图。即，您绘制一个变量 y 如何作为第二个变量 x 的函数而变化。在流体力学中，可以创建任何标量变量（压力、温度、密度等）的剖面图，但本书中最常用的是速度剖面图。我们注意到，由于速度是一个矢量量，我们通常将速度的大小或速度矢量的一个分量绘制为某个所需方向上距离的函数。例如，图 4-30 边界层流中的一个时间线通过识别在给定的时刻，垂直位置 y 处的氢气泡行进的水平距离与速度成正比，从而转换为速度剖面图。速度 u 的局部 x 分量。我们在图 4-33 中将 u 绘制为 y 的函数。绘图的 u 值也可以通过分析（见第 9 章和第 10 章）、使用 PIV 或某种局部速度测量设备（见第 8 章）或计算（见第 15 章）进行实验获得。请注意，在此示例中，在横坐标（水平轴）而不是在纵坐标（垂直轴）上绘制 u 更具有物理意义，即使它是因变量，因为位置 y 处于其正确的方向（向上) 而不是交叉。最后，虽然箭头没有提供额外信息，但通常会向速度剖面图添加箭头以使其更具视觉吸引力。如果箭头绘制了不止一个速度分量，则指示局部速度矢量的方向，并且速度剖面图变为速度矢量图。

矢量图

矢量图是一组箭头，指示某个时刻向量属性的大小和方向.

虽然流线表示瞬时速度场的方向，但它们并不直接表示速度的大小（即速度）。因此，对于实验和计算流体流动来说，一个有用的流动模式是矢量图，它由一组箭头组成，指示瞬时矢量属性的大小和方向。我们已经看到图 4-4 中的速度矢量图和图 4-14 中的加速度矢量图的示例。这些是分析产生的。矢量图也可以从实验获得的数据（例如，从 PIV 测量）或从 CFD 计算中以数字方式生成。为了进一步说明矢量图，我们生成了一个二维流场，该流场由撞击矩形横截面块的自由流组成。我们进行 CFD 计算，结果如图 4-34 所示。请注意，此流动本质上是湍流和不稳定的，但此处仅计算和显示长期平均结果。流线绘制在图 4-34a 中；显示了整个街区及其大部分尾流的视图。对称平面上方和下方的闭合流线表示大的循环涡流，一个在对称线上方，一个在对称线下方。速度矢量图如图 4-34b 所示。 （由于对称性，仅显示了流动的上半部分。）从该图中可以清楚地看出，流动围绕块的上游拐角加速，实际上边界层无法通过尖角和分离。离开块体，在块体下游产生大的再循环涡流。 （请注意，这些速度向量是时间平均值；当涡流从身体中脱落时，瞬时向量的大小和方向都会随时间发生变化，类似于图 4-25a。）分离流的特写视图区域绘制在图 4-34c 中，我们验证了大循环涡流下半部分的反向流动。图 4-34 中的矢量按速度大小着色，但使用现代 CFD 代码和后处理器，矢量可以根据其他一些流动属性进行着色，例如压力（红色表示高压，蓝色表示低压）或温度（红色代表热，蓝色代表冷）。通过这种方式，人们不仅可以轻松地可视化流量的大小和方向，还可以同时可视化其他属性。

等高线图

等高线图显示了某个时刻标量属性（或矢量属性的大小）的常数值的曲线.

如果你做过任何徒步旅行，你就会熟悉山间小径的等高线图。地图由一系列闭合曲线组成，每条曲线都表示一个恒定的海拔或高度。靠近一组此类曲线的中心是山峰或山谷；实际的峰顶或谷底是地图上显示最高或最低海拔的点。此类地图很有用，因为您不仅可以鸟瞰溪流和小径等，而且还可以轻松查看您的海拔高度以及小径平坦或陡峭的位置。在流体力学中，同样的原理适用于各种标量流动特性；等高线图（也称为等高线图）由压力、温度、速度大小、物质浓度、湍流特性等生成。等高线图可以快速显示所研究的流动特性的高（或低）值区域。等高线图可能仅由指示属性不同级别的曲线组成；这称为等高线图。或者，可以用颜色或灰色阴影填充轮廓；这称为填充轮廓图。图 4-35 中显示了一个与图 4-34 中相同的流量的压力等值线示例。在图 4-35a 中，填充轮廓使用颜色来标识不同压力水平的区域——蓝色区域表示低压，红色区域表示高压。从该图中可以清楚地看出，在分离区中，块体正面的压力最高，而沿块体顶部的压力最低。正如预期的那样，区块之后的压力也很低。在图 4-35b 中，显示了相同的压力等高线，但作为等高线图，以帕斯卡为单位标记了表压水平。在 CFD 中，等高线图通常以鲜艳的颜色显示，红色通常表示标量的最高值，蓝色表示最低值。健康的人眼可以很容易地发现红色或蓝色区域，从而定位流动特性的高值或低值区域。由于 CFD 产生的漂亮图片，计算流体动力学有时被赋予“多彩流体动力学”的绰号。

**4-4 其它运动学描述** 2021年7月5日15点23分

**流体单元的运动或变形的类型**

在流体力学中,就像在固体力学中一样,一个元素可能会经历四种基本类型的运动或变形,如图4-36中的两个维度所示: (a)**平移**,(b)**旋转**,(c)**线性应变**(有时称为拉伸应变)和(d)**剪切应变**.由于所有四种类型的运动或变形通常同时发生,因此流体动力学的研究更加复杂.因为流体元素可能处于恒定运动中,所以在流体动力学中最好用速率来描述流体元素的运动和变形.特别地,我们讨论了速度(平移率),角速度(旋转率),线性应变率(线性应变率)和剪切应变率(剪切应变率).为了使这些**变形率**在流体流动的计算中有用，我们必须用速度和速度的导数来表示它们.

平移和旋转很容易理解,因为它们通常在台球等固体粒子的运动中观察到(图4-1).为了在三个维度上完整地描述平移率,需要一个向量.**平移矢量的速率**在数学上被描述为**速度矢量**.在笛卡尔坐标系中,

在图4-36a中,流体元素沿水平(x)正方向移动;因此u为正,而𝜐(和w)为零.

点处的**旋转速率**(**角速度**)定义为在该点相交的两条初始垂直线的平均旋转速率.例如,在图4-36b中,考虑初始方形流体单元左下角的点.元素的左边缘和底边缘在该点相交并且最初是垂直的.这两条线都逆时针旋转,这是数学上的正方向.由于图中显示了实体旋转,因此这两条线之间(或该流体元素上任何两条初始垂直线之间)的角度保持为90°.因此,两条线以相同的速率旋转,平面中的旋转速率只是该平面中角速度的分量.

在更一般但仍然是二维的情况下(图4-37),流体粒子在旋转时会平移和变形,并且旋转速率根据上一段中给出的定义计算.也就是说,我们从时刻开始,两条初始垂直线(图4-37中的线和b)在平面中的点P处相交.我们沿着这些线以无穷小的时间增量移动和旋转.在时间,线旋转了角度,线旋转了角度,并且两条线都随着草绘的流动移动(两个角度值都以弧度给出,在草图中用数学表示为正).因此平均旋转角度为,并且平面中的旋转速率或角速度等于该平均旋转角度的时间导数,

留下作为练习证明方程4-20的右边,我们用速度分量u和𝜐代替角和来写出.

在三维度中,我们必须为流中某一点的旋转速率定义一个向量,因为它的大小可能在三个维度中的每一个维度上都不同.三维旋转速率矢量的推导可以在许多流体力学书籍中找到,例如Kundu和Cohen(2011)和White(2005).**旋转速率矢量**等于**角速度矢量**,并以笛卡尔坐标表示为,

**线性应变率**定义为*每单位长度的长度增加率*.在数学上,流体单元的线性应变率取决于我们测量线性应变的线段的初始方向或方向.因此,它不能表示为标量或向量.相反,我们在某个任意方向定义线性应变率,我们将其表示为方向.例如,图4-38中的线段的初始长度为,并且如图所示增长为线段.根据给定的定义并使用图4-38中标记的长度,方向上的线性应变率为,

在笛卡尔坐标系中,我们通常将方向作为三个坐标轴中的每一个的方向,尽管我们不限于这些方向.

对于更一般的情况,流体元素移动和变形,如图4-37所示.留作练习以证明公式4-23对于一般情况仍然有效.

拉动时,诸如电线,杆和梁之类的固体物体会拉伸.你应该回忆一下你对工程力学的研究,当这样的物体在一个方向上拉伸时,它通常会在垂直于该方向的方向上收缩.流体元素也是如此.在图4-36c中,原来的方形流体单元在水平方向拉伸,在垂直方向收缩.因此,线性应变率在水平方向为正,在垂直方向为负.

如果流动是不可压缩的,则流体元素的净体积必须保持不变;因此,如果元素在一个方向上拉伸,它必须在其他方向上收缩适当的量来补偿.然而,可压缩流体元件的体积可分别随着其密度的减小或增大而增大或减小.(流体元素的质量必须保持恒定,但由于,密度和体积成反比.)考虑例如气缸中的空气团被活塞压缩(图4-39);流体元素的体积减小而其密度增加,从而流体元素的质量守恒.流体单元每单位体积的体积增加率称为其**体积应变率**或**体应变率**.当体积增加时,该运动学特性被定义为正值.体积应变率的另一个同义词是**体积扩张率**,如果您考虑一下您的眼睛的虹膜在昏暗的光线下是如何扩张(放大)的,就很容易记住这一点.事实证明,体积应变率是三个相互正交的方向上的线性应变率之和.在笛卡尔坐标系(方程 4-23)中,体积应变率是这样的,

在方程4-24中,大写D符号用于强调我们所讨论的是流体单元后面的体积,即流体单元的物质体积,如方程 4-12 所示.

在不可压缩的流动中体积应变率为零.

剪切应变率是一种更难以描述和理解的变形率.点处的**剪切应变率**定义为在该点相交的两条初始垂直线之间的角度减小率的一半.(当我们将剪切应变率和线性应变率合并为一个张量时,一半的原因将变得清晰.)例如,在图4-36d中,左下角和上角的初始 90°角方形流体元素的右角减小;这根据定义是正剪切应变.然而,方形流体元素的左上角和右下角的角度随着初始方形流体元素的变形而增加;这是一个负剪切应变.显然,我们不能仅用一个标量或什至用一个向量来描述剪切应变率.相反,剪切应变率的完整数学描述需要其在任何两个相互垂直的方向上的规范.在笛卡尔坐标中,轴本身是最明显的选择,尽管我们不限于这些.考虑平面中二维的流体元素.元素随时间平移和变形,如图4-40所示.遵循两条最初相互垂直的线(分别在和方向上的线a和b).这两条线之间的角度从减小到图中处的角度标记.留作练习来说明和方向上初始垂直线在P点的剪切应变率由下式给出,

公式4-25可以很容易地扩展到三个维度.因此剪切应变率是,

最后,事实证明我们可以在数学上将线性应变率和剪切应变率组合成一个对称的二阶张量,称为应变率张量,它是方程4-23和4-26的组合:

应变率张量遵守数学张量的所有定律,例如张量不变量,变换定律和主轴.我们对应变率张量使用符号来强调它的九个分量;这也是使用笛卡尔张量表示法时的标准表示法.请注意,一些作者使用双上箭头代替,即这强调了是具有个分量的二阶张量,比像的向量高一个数学步骤,后者是具有 31 = 的一阶张量3个组成部分.

图4-41显示了可压缩流体流动中的一般(尽管是二维的)情况,其中所有可能的运动和变形同时存在.特别是,有平移,旋转,线性应变和剪切应变.由于流体流动的可压缩性,还存在体积应变(膨胀).您现在应该更好地理解流体动力学的内在复杂性,以及完全描述流体运动所需的数学复杂性.

4-5 涡度和旋转度 2021年7月5日17点17分

我们已经定义了流体元素的旋转矢量速率(见公式4-21).对流体流动分析非常重要的一个密切相关的运动学特性是**涡量矢量**,在数学上定义为速度矢量的旋度,

在物理上,您可以通过使用交叉积的右手定则来判断涡量向量的方向(图4-44).用于涡度的符号是希腊字母zeta.你应该注意到,涡度这个符号在流体力学教科书中并不通用;一些作者使用希腊字母omega (𝜔),而其他人则使用大写字母omega (Ω).在本书中,𝜔用于表示流体元素的旋转矢量(角速度矢量)的速率.结果证明旋转矢量的速率等于涡度矢量的一半,

因此,涡度是流体粒子旋转的量度.

**涡度**等于流体粒子角速度的两倍(图4-45).

具体来说,如果流场中某一点的涡量不为零,则恰好占据空间中该点的流体粒子正在旋转;该区域的流动称为**旋转[rotational]**.同样,如果流动区域的涡度为零(或小到可以忽略不计),则那里的流体粒子不旋转;该区域的流动称为**无旋流动**.在物理上,流动旋转区域中的流体粒子随着它们在流动中移动而端到端地旋转.例如，靠近固体壁的粘性边界层内的流体粒子是旋转的（因此具有非零涡度），而边界层外的流体粒子是非旋转的(它们的涡度为零).这两种情况都在图4-46中进行了说明.

流体元件的旋转与尾流,边界层,通过涡轮机械(风扇,涡轮机,压缩机等)的流动以及与传热的流动有关.除非通过粘度,不均匀加热(温度梯度)或其他不均匀现象的作用,否则流体元素的涡度不能改变.因此,如果流动起源于无旋区域,它将保持无旋状态,直到某些非均匀过程改变它为止.例如,从静止(静止)环境进入进气口的空气是无旋转的,除非在其路径上遇到物体或受到不均匀加热,否则空气将保持无旋转.如果一个流动区域可以近似为无旋的,那么运动方程就会大大简化,正如你将在第10章中看到的.

在笛卡尔坐标中,,和,公式4-28展开如下:

如果流动在xy平面中是二维的,则速度(w)的z分量为零,并且u和𝜐都不随z变化.因此,方程4-30的前两个分量完全为零,涡度简化为

注意,如果流在xy平面上是二维的,则涡度矢量必须指向z或-z方向(图4-47).

在圆柱坐标系中,,和,方程4-28展开为

对于r𝜃平面中的二维流,方程4-32简化为,

其中代替用作z方向的单位向量.请注意,如果流在r𝜃平面中是二维的,则涡量向量必须指向z或-z方向(图 4-50).

两种循环流的比较

并非所有具有圆形流线的流动都是旋转的.为了说明这一点,我们考虑两个不可压缩的,稳定的二维流,它们都在r𝜃平面中具有圆形流线:

其中和K是常数.(提醒读者会注意到,方程4-35中的在处是无限的,这在物理上当然是不可能的;我们忽略靠近原点的区域以避免这个问题.)因为速度的径向分量在两个在这种情况下都是零,流线是关于原点的圆.图4-51中描绘了两种流动的速度分布及其流线.我们现在使用公式4-33计算并比较每个流的涡度场,

毫不奇怪,固体旋转的涡量是非零的.事实上,它是角速度的两倍并指向同一方向的常数.(这与公式4-29一致.)流A是旋转的.从物理上讲,这意味着单个流体粒子在围绕原点旋转时会旋转(图 4-51a).相比之下,线涡的涡度在任何地方都是零(除了在原点,这是一个数学奇点).流B是无旋的.从物理上讲,流体粒子在围绕原点旋转时不会旋转(图4-51b).

可以在流A和旋转木马或环形交叉路口以及流B和摩天轮之间进行简单的类比(图 4-52).当孩子们围绕环形交叉路口旋转时,他们也以与游乐设施本身相同的角速度旋转.这类似于旋转流.相比之下,摩天轮上的孩子在描绘圆形路径时始终保持直立姿势.这类似于无旋流.

**4-6 雷诺输运定理** 2021年7月6日19点06分

在热力学和固体力学中,我们经常使用系统(也称为封闭系统),定义为具有固定特性的物质的数量.在流体动力学中,更常见的是使用控制体积(也称为开放系统),定义为**选择用于研究的空间区域**.系统的大小和形状可能会在一个过程中发生变化,但没有质量跨越其边界.另一方面,控制体积允许质量流入或流出其边界,称为**控制面**.控制体积也可能在过程中移动和变形,但许多实际应用涉及固定的,不可变形的控制体.

图4-54说明了从喷雾罐喷洒除臭剂的情况下的系统和控制体积.在分析喷涂过程时,我们分析的一个自然选择是移动,变形的流体(系统)或罐内表面限定的体积(控制体积).在喷洒除臭剂之前,这两种选择是相同的.当罐中的某些内容物被排出时,系统方法将排出的质量视为系统的一部分并对其进行跟踪(确实是一项艰巨的工作);因此系统的质量保持不变.从概念上讲,这相当于将一个扁平的气球连接到罐子的喷嘴上,然后让喷雾使气球膨胀.气球的内表面现在成为系统边界的一部分.然而,控制体积方法根本不关心从罐子里逸出的除臭剂(除了它在出口处的特性),因此在这个过程中控制体积的质量减少,而其体积保持不变.因此,系统方法将喷涂过程视为系统体积的扩展,而控制体积方法将其视为通过固定控制体积的控制面的流体排放.

流体力学的大多数原理都是从固体力学中采用的,在固体力学中,针对系统表达了处理广泛属性随时间变化率的物理定律.在流体力学中,使用控制体积通常更方便,因此需要将控制体积的变化与系统中的变化联系起来.**雷诺输运定理**(RTT)表示系统和控制体积的可扩展属性的时间变化率之间的关系,它提供了系统和控制体积方法之间的联系(图4-55).RTT以英国工程师 Osborne Reynolds(1842-1912)的名字命名,他在推进其在流体力学中的应用方面做了很多工作.

雷诺输运定理的一般形式可以通过考虑具有任意形状和任意相互作用的系统来推导,但推导过程相当复杂.为了帮助您掌握定理的基本含义,我们首先使用简单的几何图形以直接的方式推导出它,然后对结果进行概括.

考虑从左到右通过流场的发散(扩展)部分的流动,如图4-56所示.所考虑的流体的上下界是流动的流线,我们假设均匀流动通过这两条流线之间的任何横截面.我们选择在流场部分(1)和(2)之间固定的控制体积.(1)和(2)都垂直于流动方向.在某个初始时间,系统与控制体积重合,因此系统和控制体积相同(图4-56中的绿色阴影区域).在时间区间内,系统在截面(1)以均匀速度和截面(2)以均匀速度沿流动方向移动.稍后的系统由阴影区域指示.在此运动期间系统未覆盖的区域被指定为第I部分(CV的一部分),系统覆盖的新区域被指定为第II部分(不是CV的一部分).因此,在时间,系统由相同的流体组成,但它占据区域CV-I+II.控制体积在空间中是固定的,因此它始终保持为标记为CV的阴影区域.

设B代表任何**容量性质**(如质量,能量或动量),设代表相应的**密集性质**.注意到**容量性质**是可加的,系统在时间和的容量性质B表示为,

从第二个方程中减去第一个方程并除以给出,

取极限为,并利用导数的定义,我们得到,

或

由于

并且

其中和是位置1和2处的横截面积.公式4-38表明系统属性B的时间变化率等于控制体积B的时间变化率加上B通过质量穿过控制面离开控制体积的净通量.这是所需的关系,因为它将系统属性的更改与控制体积的该属性的更改相关联.请注意,公式4-38适用于任何时刻,其中假设系统和控制体积在该特定时刻占据相同的空间.

在这种情况下,属性B的流入和流出很容易确定,因为只有一个入口和一个出口,并且速度近似垂直于截面(1)和(2)的表面.然而,一般而言,我们可能有多个入口和出口端口,并且速度可能与入口点处的控制面不垂直.此外,速度可能不均匀.为了概括该过程,我们考虑控制面上的微分表面积,并用表示其**单位外法线**.属性b通过的流速是,因为点积给出了速度的法向分量.然后通过整个控制面的净流出率由积分确定为(图4-57),

这种关系的一个重要方面是它会自动从流出中减去流入,如下所述.控制面上某一点的速度矢量与该点的外法线的点积为,其中𝜃是速度矢量与外法线之间的夹角,如图4-58所示.对于𝜃<90°,,因此表示质量从控制体积流出,而对于 𝜃>90°,并且因此表示质量流入控制体积.因此,微分量对流出控制体积的质量为正,对流入控制体积的质量为负,它在整个控制面上的积分给出了性质B的净流出速率为大量的.

通常,控制体积内的属性可能随位置而变化.在这种情况下,控制体积内属性B的总量必须通过积分确定:

因此,公式4-38中的项等于,并且表示控制体积的属性B内容的时间变化率. 的正值表示B内容增加,负值表示B内容减少.将方程4-39和4-40代入方程4-38得出雷诺输运定理,也称为固定控制体积的系统到控制体积变换:

由于控制体积不随时间移动或变形,右侧的时间导数可以在积分内移动,因为积分域不随时间变化.(换句话说,我们是先微分还是先积分无关紧要.)但在这种情况下,时间导数必须表示为偏导数,因为密度和数量可能不仅取决于时间,还取决于也在控制体积内的位置上.因此,固定控制体积的雷诺输运定理的另一种形式是,

事实证明,公式4-42也适用于移动和/或变形控制体的最一般情况,前提是速度向量是绝对速度(从固定参考系看).

接下来我们考虑RTT的另一种替代形式.公式4-41是针对固定控制体积推导出来的.然而,许多实际系统如涡轮和螺旋桨叶片涉及非固定控制体积.幸运的是,方程4-41也适用于移动和/或变形控制体积,前提是绝对流体速度在最后一项中被**相对速度**代替,

其中,CS是控制面的局部速度(图4-59).因此,雷诺输运定理的最一般形式是,

请注意,对于随时间移动和/或变形的控制体积,在公式4-44中积分后应用时间导数.作为移动控制量的一个简单示例,考虑一辆玩具车以恒定的绝对速度向右移动.一股高速水流(绝对速度向右)撞击汽车后部并推动它(图4-60).如果我们在汽车周围绘制一个控制体积,则相对速度为向右.这表示随着控制体积移动(与汽车一起移动)的观察者将观察到穿过控制面的流体的速度.换句话说,是相对于随控制体积移动的坐标系表示的流体速度.

最后,通过应用莱布尼茨定理(稍后将讨论),可以证明一般移动和/或变形控制体积的雷诺输运定理(方程4-44)等价于方程4-42,这里重复:

与方程4-44不同,方程4-45中的速度矢量必须被视为绝对速度(从固定参考系看),以便应用于非固定控制体积.

在稳定流动期间,控制体积内的属性B的量随时间保持不变,因此方程4-44中的时间导数变为零,然后雷诺输运定理简化为,

注意,与控制体积不同的是,系统的属性B内容在稳定过程中仍可能随时间变化.但在这种情况下,变化必须等于质量通过控制面传递的净属性(平流效应而不是不稳定效应).

在RTT的大多数实际工程应用中,流体在有限数量的明确定义的入口和出口处穿过控制体积的边界(图4-61).在这种情况下,可以方便地直接穿过每个入口和出口切割控制面,并将公式4-44中的表面积分替换为基于穿过边界的流体属性平均值的每个入口和出口处的近似代数表达式.我们定义和分别为和的平均值,它们分别穿过横截面积A的入口或出口,例如. RTT中的表面积分(公式4-44),当应用于横截面积A的入口或出口时,然后通过从表面积分中提取属性b并将其替换为其平均值来近似.这产生,

其中是通过入口或出口相对于(移动)控制面的质量流量.当属性b在横截面积A上是均匀的时,该方程中的近似值是准确的.因此,方程4-44变为,

在某些应用中,我们可能希望根据体积(而不是质量)流速重写公式4-47.在这种情况下,我们进一步近似.当流体密度在上均匀时,这种近似是准确的.等式4-47然后简化为

请注意,这些近似值极大地简化了分析,但可能并不总是准确的,尤其是在入口或出口的速度分布不是很均匀的情况下(例如,管道流动;图4-61).特别地,当属性b包含速度项时(例如,当将RTT应用于线性动量方程时,）,方程4-45的控制面积分变为非线性,方程4-48的近似导致错误.幸运的是,我们可以通过在公式4-48中加入校正因子来消除错误,如第五章和第六章所讨论的.

等式4-47和4-48适用于固定或移动控制体积,但如前所述,相对速度必须用于非固定控制体积的情况.例如,在公式4-47中,质量流量是相对于(移动)控制面的,因此是r下标.

**雷诺输运定理的替代推导**

通过使用莱布尼茨(有时是莱布尼茨)定理,雷诺输运定理的更优雅的数学推导是可能的(参见Kundu和Cohen,2011).您可能熟悉这个定理的一维版本,它允许您对积分极限是您需要微分的变量的函数的积分进行微分(图4-62):

莱布尼茨定理考虑了极限和随时间的变化,以及被积函数随时间的非稳态变化.

在三维,体积积分的莱布尼茨定理是,

其中是移动和/或变形体积(时间的函数),是其表面(边界),而是该(移动)表面的绝对速度(图4-63).公式4-50适用于任何体积,在空间和时间上任意移动和/或变形.为了与前面的分析保持一致,我们将被积函数设置为以应用于流体流动,

如果我们将莱布尼茨定理应用于物质体积的特殊情况（一个固定恒等式随流体流动移动的系统）,则在材料表面的任何地方.这里是局部流体速度,方程4-51变为

公式4-52在时间t的任何时刻都有效.我们定义我们的控制体积,使得在这个时间t,控制体积和系统占据相同的空间;换句话说,它们是重合的.在稍后的时间,系统随着流动而移动和变形,但控制体积的移动和变形可能有所不同(图4-64).然而,关键是在时间t,系统(材料体积)和控制体积是一回事.因此,方程4-52右侧的体积积分可以在时间t的控制体积上计算,表面积分可以在时间t的控制面上计算.因此,

该表达式与公式4-42的表达式相同,并且对于时间处的任意形状,移动和/或变形的控制体积有效.请记住,方程4-53中的是绝对流体速度.

物质导数和RTT之间的关系

您可能已经注意到第 4-1 节中讨论的材料导数与此处讨论的雷诺输运定理之间存在相似之处或类比。事实上，这两种分析都代表了从基本的拉格朗日概念转换为对这些概念的欧拉解释的方法。虽然雷诺输运定理处理有限尺寸的控制体积，材料导数处理无穷小的流体粒子，但相同的基本物理解释适用于两者（图 4-65）。事实上，雷诺输运定理可以被认为是物质导数的积分对应。在任何一种情况下，流体的特定部分之后的某些特性的总变化率由两部分组成： 有一个局部的或不稳定的部分，它说明了流场随时间的变化（比较右边的第一项等式 4-12 的一侧到等式 4-45 的一侧）。还有一个对流部分解释了流体从流动的一个区域到另一个区域的运动（比较公式 4-12 和 4-45 右侧的第二项）。正如材料导数可以应用于任何流体属性、标量或矢量一样，雷诺输运定理也可以应用于任何标量或矢量属性。在章。在图 5 和图 6 中，我们通过将参数 B 分别选择为质量、能量、动量和角动量，将雷诺输运定理应用于质量、能量、动量和角动量守恒。通过这种方式，我们可以轻松地从基本系统守恒定律（拉格朗日观点）转换为在控制体积分析中有效和有用的形式（欧拉观点）。